

A BSc-képzés szakdolgozati témái

ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék

2020/2021

BSc szakdolgozati témát a matematika valamely témaköréből vagy annak tanításából lehet választani. A szakdolgozat célja, hogy a hallgató elmélyedjen egy területen és azt a témavezető segítségével feldolgozza. Tipikus szakdolgozati téma lehet egy könyvfejezet megértése feladatok segítségével, vagy egy alkalmazott matematikai feladat megismerése, megoldása. Önálló matematikai eredményeket nem várunk el, önálló munkát azonban igen. Ez nemcsak az irodalom feldolgozását és az anyag megértését jelenti, hanem például önálló feladatmegoldást, feladatok, programok vagy népszerűsítő anyagok készítését is. A dolgozat elvárt terjedelme kb. 25 – 30 oldal.

Szakdolgozati témát (legkésőbb) az ajánlott tanterv szerint haladóknak az 5. félévben október 15-ig kell választani. A tanszékek minden év szeptember közepéig meghirdetik az aktuális szakdolgozati témákat. A leadással kapcsolatos tennivalókról és határidőkről a Matematikai Intézet honlapján olvasható tájékoztatás.

A szakdolgozat elkészítésében a hallgatót témavezető(k) segíti(k). A témavezető(ke)t a hallgató az egyetem oktatói és tudományos kutatói közül választhatja ki. Az illetékes tanszékvezető jóváhagyásával külső szakembert is fel lehet kérni témavezetőnek.

A szakdolgozatot a záróvizsgán, a szakdolgozat teljes témájáról folytatott interaktív beszélgetés keretében kell megvédeni. A szakdolgozatra és a védésre a hallgató külön érdemjegyet kap, ezeket a záróvizsga-bizottság állapítja meg. A védelem céljai közé tartozik annak ellenőrzése, hogy a hallgató megfelelő mélységben érti-e a szakdolgozat témájához tartozó alapfogalmakat.

A-Sz.1. Szabadon választható téma.

Témavezető: A tanszék bármelyik oktatója, vagy (a tanszékvezető által jóváhagyott) külső szakember.

A téma rövid leírása: Ha egy hallgató tetszőleges algebrai vagy számelméleti téma iránt érdeklődik, akkor témavezetőnek választhatja azt a szakembert, aki ehhez ért, és ebben segítséget tud neki nyújtani.

Ajánlott irodalom: a hallgató és a témavezető megállapodása alapján.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.2. Catalan-számok — FOGLALT.

Témavezető: Ágoston István

A téma rövid leírása: A $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ Catalan-számoknak számos interpretációja ismeretes: pl. C_n adja meg egy szabályos $(n+2)$ -szög egymást belső pontban nem metsző átlókkal való háromszögeléseinek a számát; hasonlóképpen C_n adja egy $n+1$ -tényezős szorzat különböző zárójelezéseinek a számát; az is igaz, hogy C_n az n csúcsú bináris fáknek a számával egyenlő; stb. (Richard Stanley a honlapján 207 ilyen értelmezést sorol föl.) A különböző interpretációkhoz tartozó halmazsorozatok (háromszögelések, zárójelezések, bináris fák) között gyakran könnyen megadható egy természetes megfeleltetés. Ez azt is lehetővé teszi, hogy az egyes halmazokon megadható kiegészítő struktúrának (pl. parciális rendezés stb.) megkeressük a megfelelőjét az analóg halmazokban is. A szakdolgozat célja lehetne az egyes értelmezések földolgozása, összehasonlítása, esetleg újabb Catalan-halmazok megadása. A Catalan-halmazoknak egészen kurrens algebrai alkalmazásait is meg lehetne nézni.

Ajánlott irodalom: Stanley: *Enumerative combinatorics, vol. 2.*, 1999;

Stanley: *Catalan numbers*, CUP 2015.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.3. Példák, konstrukciók a gyűrűk és modulusok elméletében

Témavezető: Ágoston István

A téma rövid leírása: Mutassunk példát olyan gyűrűre, ami minimufeltételes a balideálokra, de nem minimumfeltételes a jobbideálokra. Mutassunk példát olyan gyűrűre, amely bal-primitív, de nem jobb-primitív. Mutassunk példát olyan modulusra, amely nem bontható direkt fölbonthatatlan modulusok direkt összegére. – A szakdolgozatban néhány érdekes példát lehetne az irodalom alapján földolgozni: a példák, konstrukciók és a lehetséges érdekes kérdések tárháza szinte kimeríthetetlen (lásd pl. a <https://math.stackexchange.com> fórumait).

Ajánlott irodalom: Pl. <https://www.ams.org/journals/proc/1964-015-03/S0002-9939-1964-0167497-4/S0002-9939-1964-0167497-4.pdf>

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.4. A Hilbert-féle nullhelytétel bizonyításai és alkalmazásai.

Témavezető: Frenkel Péter

A téma rövid leírása: Hilbert nullhelytétele (Nullstellensatz) alapvető kapcsolatot teremt a kommutatív algebra és az algebrai geometria között. A tételnek számos bizonyítása és rengeteg alkalmazása ismeretes (például egy invariánselméleti alkalmazás, amely David Hilbert eredeti motivációja volt). Ezek egy részét lehetne áttekinteni a diplomamunkában.

Ajánlott irodalom: Eisenbud, David: *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*

Ajánlott szakirányok: matematikus, alkalmazott matematikus.

A-Sz.5. Nemkommutatív Cayley–Hamilton-tétel.

Témavezető: Frenkel Péter

A téma rövid leírása: Szigeti Jenő 1997-ben általánosította a Cayley–Hamilton tételt Lie-nilpotens gyűrűk feletti mátrixokra. A bizonyítás messze nem triviális, sőt még az állításban szereplő fogalmak sem maguktól értetődőek. Valójában egy új, nemkommutatív determinánselméletről van szó. Ezt és kapcsolódó eredményeket, nyitott kérdéseket tárgyalhatná a szakdolgozat.

Ajánlott irodalom: Szigeti J., *New determinants and the Cayley-Hamilton theorem for matrices over Lie nilpotent rings*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 8, 2245–2254.

Ajánlott szakirányok: matematikus, alkalmazott matematikus.

A-Sz.6. A Capelli-azonosság.

Témavezető: Frenkel Péter

A téma rövid leírása: A Capelli-azonosságra a determinánsok szorzástételének egyfajta "kvantum-változataként" gondolhatunk. Fontos szerepet játszik a klasszikus mátrixcsoportok invariánselméletének Hermann Weyl-féle klasszikus felépítésében. Van klasszikus mátrixalgebrai, reprezentációelméleti és elemi kombinatorikus bizonyítása, valamint számos érdekes és fontos analogonja, változata.

Ajánlott irodalom: H. Weyl: *The classical groups — their invariants and representations*; R. Goodman, N. R. Wallach: *Representations and invariants of the classical groups*; D. Foata, D. Zeilberger: *Combinatorial proofs of Capelli's and Turnbull's identities from classical invariant theory*, The Electronic Journal of Combinatorics, 1994.

Ajánlott szakirányok: matematikus

A-Sz.7. Sidon sorozatok.

Témavezető: Gyarmati Katalin

A téma rövid leírása: Sidon-sorozatnak vagy Sidon-halmaznak nevezzük természetes számoknak egy $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ véges vagy végtelen sorozatát, ha az A elemeiből képzett valamennyi kéttagú $a_i + a_j$ ($i \leq j$) összeg különböző.

Ajánlott irodalom: O'Bryant, K. (2004), *A complete annotated bibliography of work related to Sidon sequences*, Electronic Journal of Combinatorics 11: 39, <http://www.emis.ams.org/journals>.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.8. Additív és multiplikatív problémák.

Témavezető: Gyarmati Katalin

A téma rövid leírása: A témakörben bármilyen egész számokból álló halmazok összegére, szorzatára vonatkozó téma belefér.

Ajánlott irodalom: K. Gyarmati, *On a problem of Diophantus*, Acta Arith. 97.1 (2001), 53-65.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.9. Pszeudovéletlen objektumok.

Témavezető: Gyarmati Katalin

A téma rövid leírása: Az ókortól kezdve napjainkig a véletlengenerálás mindig fontos szerepet játszott. De mi is az a véletlenszám generálás? Az általunk használt módszerek valóban véletlen számokat állítanak-e elő? Ebben a témakörben számítógép által generálható pszeudovéletlen objektumokat fogunk tanulmányozni.

Ajánlott irodalom: C. Mauduit, A. Sárközy, *On finite pseudorandom binary sequence I: Measures of pseudorandomness, the Legendre symbol*, Acta Arith. 82 (1997), 365-377.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.10. Struktúrák sok szimmetriával*Témavezető:* Halasi Zoltán

A téma rövid leírása: Jól ismert, hogy tetszőleges véges csoporthoz lehet olyan véges gráfot készíteni, melynek automorfizmuscsoportja izomorf a kiindulási csoporttal. Ezzel szemben véletlenszerűen választva egy gráfot, annak automorfizmus csoportja jó eséllyel kicsi lesz. Célunk olyan gráfok, vagy egyéb véges struktúrák keresése, melyek sok szimmetriával bírnak.

Ajánlott irodalom: A. E. Brouwer, A. M. Cohen A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*.

Ajánlott szakirányok: mindegyik

A-Sz.11. Klasszikus csoportok.*Témavezető:* Halasi Zoltán

A téma rövid leírása: A véges egyszerű csoportok klasszifikációjából tudjuk, hogy — az alternáló csoporttól, illetve 26 spóradikus csoporttól eltekintve — egy véges nemkommutatív egyszerű csoport Lie típusú, azaz valamiképpen kapcsolódik valamely komplex test feletti egyszerű Lie algebrához. Ezen csoportok egy alosztályát alkotják a klasszikus csoportok. A szakdolgozat célja összefoglalást nyújtani ezen csoportok illetve a kapcsolódó Lie algebrák szerkezetéről különféle testek felett.

Ajánlott irodalom: J. E. Humphreys: *Introduction to Lie algebras and representation theory*; A. W. Knap, *Lie Groups beyond an Introduction*

Ajánlott szakirányok: matematikus

A-Sz.12. Csoportelméleti fejezetek — feladatok és szimbolikus számítások tükrében.*Témavezető:* Hermann Péter

A téma rövid leírása: Az algebra kurzusok keretében tárgyalt algebrai struktúrák között a csoportok alapvető szerepet játszanak. A tanultak továbbgondolása és néhány új fogalom és módszer megismerése a leghatékonyabban az önálló feladatmegoldás keretében valósítható meg. A feladatok sok esetben vezetnek olyan kérdésekhez, amelyeket még konkrét példákban sem mindig lehet emberi erővel kiszámolni. Ilyen esetekre alkották meg a GAP rendszert, amelynek alapjai könnyen elsajátíthatóak, és a konkrét számítások elvégezhetőségén kívül szép programozási feladatokat is kínálhatnak az egyes függvények grafikus alkalmazásokba építésére.

Ajánlott irodalom: D. J. S. Robinson: *A Course in the Theory of Groups*, különösen az 1.6., 2.2. és 7.2 pontok, N. L. Biggs and A. T. White: *Permutation Groups and Combinatorial Structures*.

Ajánlott szakirányok: tanári és elemző.

A-Sz.13. Halmazrendszerek és lineáris algebra.

Témavezető: Hermann Péter

A téma rövid leírása: Bizonyos kombinatorikai tulajdosságokkal rendelkező véges halmazrendszerek vizsgálatának időnként meglepően hatékony eszközt nyújtunk alkalmas vektorrendszerek, ill. mátrixok bevezetésével és azok összefüggőségi viszonyainak ill. rangjának megállapításával. A tanult lineáris algebrai alapfogalmak is elegendőek arra, hogy egy-egy feladatsor megoldásának eredményeként olyan kombinatorikai eredményekhez jussunk, amelyekhez közvetlenül nem vagy csak igen körülményesen juthatnánk el.

Ajánlott irodalom: Babai L. és Frankl P.: *Linear Algebra Methods in Combinatorics*, különösen a 7.4., 7.5. és 5.11 pontok

Ajánlott szakirányok: tanári és elemző.

A-Sz.14. Csoportok az elméleti fizikában.

Témavezető: Hermann Péter

A téma rövid leírása: A véges és végtelen csoportok és azok reprezentációi meglepő szerephez jutnak a kvantummechanikában. A témáról szóló klasszikus mű bizonyos részeinek feldolgozása és viszonylag egyszerű eszközökkel való ismertetése szép feladat a fizikában is járatosabb hallgató számára. Az eredmény hozzájárulhat a matematika és a természettudományok e híres, ám részleteiben nem közismert kapcsolatának népszerűsítéséhez a matematika és a fizika tanításában.

Ajánlott irodalom: Wigner J.: *Csoportelméleti módszer a kvantummechanikában*, különösen a 4., 9., 11. és 18. szakasz

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.15. Véges testekre alapuló konstrukciók

Témavezető: Károlyi Gyula

A téma rövid leírása: Számos olyan extrémális probléma van a számelmélet és a kombinatorika területén, ahol nagy struktúrák megtalálásában segítségünkre lehetnek a véges testek. A szakdolgozatban néhány ilyen kérdést (pl. Sidon-sorozatok, Van der Waerden tétele) járunk körül.

Ajánlott irodalom: Freud R. és Gyarmati E.: *Számelmélet, 2. kiadás,*

Hraskó A.: *Új matematikai mozaik*

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.16. Egyenletes eloszlás és diszkrepancia

Témavezető: Károlyi Gyula

A téma rövid leírása: Mit jelent az, hogy egy sorozat vagy egy véges halmaz pontjai egyenletesen oszlanak el a $[0,1]$ intervallumban, vagy annak egy magasabb dimenziós megfelelőjében? Hogyan lehet és érdemes mérni azt, hogy egy ilyen ponthalmaz mennyire egyenletes eloszlású? Hogyan lehet minél jobb sorozatokat készíteni, és hogyan alkalmazhatóak ezek többváltozós függvények numerikus integrálására? A konstrukciók megtalálásához a számelmélet és az algebra segít, az alkalmazhatóság határainak feszegetéséhez pedig tipikusan az analízis eszközeit használjuk.

Ajánlott irodalom: J. Beck and W.W.L. Chen: *Irregularities of Distribution*, J. Matoušek: *Geometric Discrepancy*, B. Chazelle: *The Discrepancy Method: Randomness and Complexity*

Ajánlott szakirányok: alkalmazott matematikus, matematikus.

A-Sz.17. A kombinatorikus nullhelytétel változatai és alkalmazásai

Témavezető: Károlyi Gyula

A téma rövid leírása: A cél annak vizsgálata, hogyan lehet a nullhelytétel különböző változatait alkalmazni a kombinatorikus számelméletben, a gráfelméletben, illetve az algebrai kombinatorikában.

Ajánlott irodalom: a témához kapcsolódó angol nyelvű szócikkek.

Ajánlott szakirányok: alkalmazott matematikus, matematikus.

A-Sz.18. Versenyfeladatok az általános- és középiskolában.

Témavezető: Kiss Emil

A téma rövid leírása: A cél bizonyos (elsősorban algebrahoz kapcsolódó) témákból vagy adott megoldási módszert használó feladatok gyűjtése, rendszerezése, többféle megoldása, általánosítása, hasonló feladatok készítése.

Ajánlott irodalom: versenyfeladatok gyűjteményei, Középiskolai Matematikai Lapok.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.19. Általános algebrák, hálók.*Témavezető:* Kiss Emil

A téma rövid leírása: Az általános algebráknak az utóbbi évtizedekben mély elmélete alakult ki. Az alapok elsajátítása mellett szabadon lehet választani olyan témákból, mint teljességi kérdések, kommutátorelmélet, kongruenciaszeledítés, a szubdirekt irreducibilis algebrák viselkedése.

Ajánlott irodalom: Kiss: *Bevezetés az algebrába*, 8. fejezet, Hobby–McKenzie: *The structure of finite algebras*.

Ajánlott szakirányok: matematikus.

A-Sz.20. Kockák és kvaterniók.*Témavezető:* Kiss Emil

A téma rövid leírása: Az alábbi cikkben a szerzők az egész kvaterniók számelméletét használják fel térbeli, egész koordinátájú vektorokból képzett négyzet- és kockarácsok vizsgálatára. A témához kapcsolódik a négy négyzetszám összegére való felbontások számának megállapítása, valamint a pitagoraszi számnégyesek megértése is. Az eredmények esetleg továbbfejleszthetők magasabb dimenziókban.

Ajánlott irodalom: Rédei: *Algebra*, Goswick–Kiss–Moussong–Simányi: *Sums of squares and orthogonal integral vectors*.

Ajánlott szakirányok: matematikus.

A-Sz.21. Abel-csoportok.*Témavezető:* Kiss Emil

A téma rövid leírása: Az Abel-csoportok algebrailag jól viselkedő osztályt alkotnak, ezért a példájukon könnyen megérthetők olyan általánosabb moduluselméleti fogalmak, mint a direkt felbontások létezése, injektivitás, projektivitás, tenzorszorzat.

Ajánlott irodalom: Kiss: *Bevezetés az algebrába*, 7. fejezet, L. Fuchs: *Infinite Abelian groups*.

Ajánlott szakirányok: matematikus.

A-Sz.22. Magyar matematikusok a huszadik században.*Témavezető:* Pálffy Péter Pál

A téma rövid leírása: Egy — választás szerinti — magyar matematikusnak a Rényi Intézet könyvtárában őrzött hagyatékának (levelezés, kéziratok, különlenyomatok) feldolgozása.

Ajánlott irodalom: Horváth János (szerk.): *Panorama of the Hungarian Mathematics in the Twentieth Century.*

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.23. Szimmetriacsoportok.

Témavezető: Pálffy Péter Pál

A téma rövid leírása: A csoportelmélet a szimmetriák absztrakt matematikai elmélete. Síkbeli, illetve térbeli szimmetriacsoportok megjelennek a díszítőművészetekben és a kristálytanban is. A lehetséges szimmetriacsoportok leírása jól ismert matematikai eredmény. A szakdolgozat témája a bizonyítás bemutatása, valamint az eredmény illusztrálása lehet.

Ajánlott irodalom: H. Weyl: *Szimmetria.*

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.24. Gráfok izomorfizmus-problémája algebrai eszközökkel

Témavezető: Somlai Gábor

A téma rövid leírása: A gráfok izomorfizmus problémájának komplexitása nem ismert. A szakdolgozat célja egy speciális gráfosztályra a probléma bemutatása lehet. Ezek egyike a Cayley gráfok izomorfizmus problémája. Itt a cél az, hogy kizárólag a csoport automorfizmus csoportjának vizsgálatával, amiből a gráfot konstruáltuk, el tudjuk dönteni, mikor izomorf két Cayley gráf. Egy másik ettől eltérő, de algebrai eszközöket használó eset, a kompakt gráfoké. Az egész témakör Birkhoff azon tételén alapul, ami azt mondja, hogy a duplán sztochasztikus mátrixok előállnak, mint a permutációmátrixok konvex kombinációi. Ez a jelenség a szimmetrikus csoport nyelvén megfogalmazva rögtön algebrai problémákhoz vezet.

Ajánlott irodalom: C. H. Li, *On Cayley isomorphism of finite Cayley graphs. A survey*, V. Arvind, Johannes Köbler, Gaurav Rattan, Oleg Verbitsky: *Graph Isomorphism, Color Refinement, and Compactness.*

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.25. Erdős-Ko-Rado tétel algebrai változata

Témavezető: Somlai Gábor

A téma rövid leírása: Az Erdős-Ko-Rado tétel a kombinatorika egyik alapvető tétele. Ezt a tételt több különböző kontextusban próbálták általánosítani. Hasonló kérdéseket próbáltak megfogalmazni például a csoportelmélet nyelvén. Ezek újabb eszközöket is adtak az eredeti tétel belátására. A szakdolgozat célja ezen kérdések és új módszerek közül néhány áttekintése lehetne.

Ajánlott irodalom: Cameron, Ku: *Intersecting families of permutations*, Godsil, Meagher: *A new proof of the Erdős–Ko–Rado theorem for intersecting families of permutations*, P. Frankl, R. L. Graham: *Old and new proofs of the Erdős–Ko–Rado Theorem*.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.26. Cowen-Meyerowitz sejtés

Témavezető: Somlai Gábor

A téma rövid leírása: Az egész számok egy alkalmas véges halmaz eltoltjával néha parkettázhatóak. A parkettázás mindig periodikus abban az értelemben, hogy az egész számok minden parkettázása visszavezethető egy alkalmas véges ciklikus csoport parkettázására. Felmerül a kérdés, hogy ezeket leírjuk. Ezzel kapcsolatos a Cowen-Meyerowitz sejtés, ami négyzetmentes ciklikus csoportokra azt mondja, hogy minden parkettázó halmaz egy alkalmas részcsoporthoz minden mellékosztályával pont egy közös eleme van. A szakdolgozat ezt és a Fugelee sejtést járja körül, lehetőséget biztosítva egyszerű, még nem ismert esetek átgondolására, esetleg számítógéppel történő leellenőrzésére

Ajánlott irodalom: <https://arxiv.org/pdf/math/9802122.pdf>

Ajánlott szakirányok: matematikus, alkalmazott matematikus

A-Sz.27. Műveletekkel megadott homogén struktúrák.

Témavezető: Szabó Csaba

A téma rövid leírása: Azon algebraosztályokat vizsgáljuk, amelyek tartalmazzanak úgynevezett homogén algebrát. Elsősorban az automorfizmus csoportra és annak szupercsoportjaira vagyunk kíváncsiak, de a műveleti redukciókat is vizsgáljuk.

Ajánlott irodalom: Cikkek.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.28. Alacsonyfokú egyenlet megoldása.

Témavezető: Szabó Csaba

A téma rövid leírása: Középiskolában teljes négyzetté való alakítással levezetjük a másodfokú egyenlet megoldóképletét. Első félévben frappáns észrevételekkel formulát adunk a harmadfokú egyenlet megoldására. Hogy keressük a legfőbb negyedfokú polinomok gyökképletét — Galois elmélet segítségével? A radikállal való megoldhatóság és a Galois csoportról szóló ismeretek teljes tárházára szükségünk lesz.

Ajánlott irodalom: Stewart: *Galois Theory*.

Ajánlott szakirányok: matematikus.

A-Sz.29. CSP versus univerzális algebra.

Témavezető: Szabó Csaba

A téma rövid leírása: Az utóbbi időben az úgynevezett reláció homomorfizmus probléma bonyolultságának eldöntése az érdeklődés központjába került. Ide tartozik például a gráfok retrakciója is. Kiderült, hogy a kérdés átfogalmazható a relációkat megtartó algebraik nyelvére. Ezt az összefüggést próbáljuk megérteni a dolgozatban.

Ajánlott irodalom: *különböző jegyzetek.*

Ajánlott szakirányok: matematikus, alkalmazott matematikus.

A-Sz.30. Mi motiválja/motiválta az algebra fejlődését?

Témavezető: Zábrádi Gergely

A téma rövid leírása: Kummer a Fermat-sejtést próbálta bizonyítani, miközben megalkotta az „ideális számok” fogalmát, melyből később kialakult az absztrakt gyűrűelméleti ideál-fogalom. Létezik egy másik, Abeltől származó bizonyítás is arra, hogy az 5-ödfokú egyenletre nincs megoldóképlet, miért tanítják mégis szinte minden egyetemen a Galois-elméleti bizonyítást? A konkrét kérdés megválaszolása vagy a közben felépített elmélet a fő motiváció? Min múlik, hogy egy elmélet fennmarad-e? Az ilyen típusú kérdésekre keressük a választ az algebra történetében.

Ajánlott irodalom: konkrét témától függően különböző matematikatörténeti könyvek, internetes források, egyetemi jegyzetek, esetleg szakkikkek.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.31. Algebrai csoportok.

Témavezető: Zábrádi Gergely

A téma rövid leírása: Algebrai csoportnak a polinomegyenletekkel definiált mátrixcsoportokat nevezzük. Kicsit precízebben ezek olyan algebrai varietások, melyeken megadható egy csoportművelet, ami algebrai geometriai értelemben morfizmus. Ez lényegében a topologikus csoport, illetve a Lie-csoport megfelelője az algebrai geometriában. Ennek megfelelően – algebrailag zárt test fölött – hasonlóképp klasszifikálhatók gyökrendszerek segítségével, mint a Lie-csoportok. Az algebrai csoportoknak számos alkalmazása van az algebrai és az aritmetikai geometriában: utóbbihoz elengedhetetlen, hogy ne csak algebrailag zárt test fölött, hanem akár tetszőleges kommutatív egységelemes

gyűrű fölött tekintsük ezen csoportokat. Az absztrakció szintje a szakdolgozó ízlésétől és előképzettségétől függ: BSc szinten a klasszikus, algebrailag zárt test fölötti felépítést ajánlom, de meg lehet próbálkozni a modern, „csoport-sémás” nyelvezettel is (vagy akár MSc-n ezzel folytatni). Bevezető algebrai geometriai ismeretek előnyt jelentenek, de nem szükségesek: mindent meg lehet tanulni út közben.

Ajánlott irodalom: Szamuely Tamás: *Linear algebraic groups*, ill. J.S. Milne: *Algebraic Groups*; mindkét jegyzet elérhető az interneten.

Ajánlott szakirányok: matematikus.

A-Sz.32. p -adikus Lie-csoportok.

Témavezető: Zábrádi Gergely

A téma rövid leírása: A p -adikus Lie-csoportok fő alkalmazási területe az algebrai számelmélet és az aritmetikai geometria. Ennek egyik fő oka, hogy ezen csoportok természetes módon előjönnek Galois-csoportként. Másrészt bizonyos p -adikus csoportok reprezentációelméletének megértése a Langlands-program egyik fő feladata. Útközben a szakdolgozó megtanulhatja a p -adikus analízis alapjait – ezen fölül a véges p -csoportok ismerete előny, de nem feltétlenül szükséges. A kompakt p -adikus Lie-csoportok elmélet viszonylag közel áll a véges csoportokéhoz, mivel ezek provégések (véges csoportok inverz limeszei), ráadásul van egy véges indexű részcsoportjuk, ami p -csoportok elég speciális inverz limesze.

Ajánlott irodalom: P. Schneider: *p -adic Lie groups* (Springer, 2011); J. D. Dixon, M. P. F. du Sautoy, A. Mann, D. Segal *Analytic pro- p groups* (CUP, 1999); Simon Wadsley: *Iwasawa algebras*.

Ajánlott szakirányok: matematikus.

A-Sz.33. A Weil-sejtések

Témavezető: Zábrádi Gergely

A téma rövid leírása: A Weil-sejtések nevükkel ellentétben már szinte 50 éve tételek: 1973-as bizonyításukért Deligne Fields-érmét kapott 1978-ban. A történet onnan indult, hogy az 1940-es években Weil észrevette, hogy egy, a topológiában használatoshoz hasonló, algebrai geometriai kohomológia-elmélet létezése mélyebb magyarázatot adna bizonyos, véges test fölötti görbék pontjainak számára vonatkozó eredményeire. Egy ilyen (Weil-féle) kohomológia-elmélet létezésének további következményeiként fogalmazta meg sejtéseit véges test fölötti polinomegyenletek közös gyökeinek számáról. Viszont egy megfelelő tulajdonságokkal rendelkező kohomológia-elmélet (az étale kohomológia)

megalkotására még szinte két évtizedet kellett várni. Grothendieck, Artin és Verdier majd Grothendieck tanítványainak munkássága lényegében a modern algebrai geometria kialakulásához vezetett. Az étale-kohomológia bizonyos technikai, de a Weil-sejtések igazolásához szükséges tulajdonságainak igazolásához még így is Deligne zsenialitására volt szükség. A szakdolgozat célja lehet a Weil-sejtések speciális eseteinek elemi bizonyítása vagy ambíciózusaknak akár az étale-kohomológia felépítése is, bár utóbbi – nehézségét tekintve – inkább MSc téma.

Ajánlott irodalom: Mircea Mustața: *Zeta functions in algebraic geometry*; K. Ireland, M. Rosen: *A classical introduction to modern number theory* (Springer, 1990); J.H. Silverman *The arithmetic of elliptic curves* (Springer, 2009); J.S. Milne: *Lectures on étale cohomology*;

Ajánlott szakirányok: matematikus.